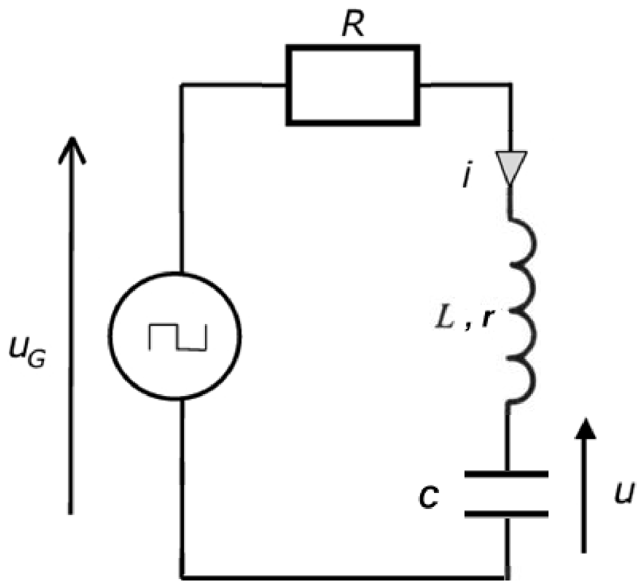
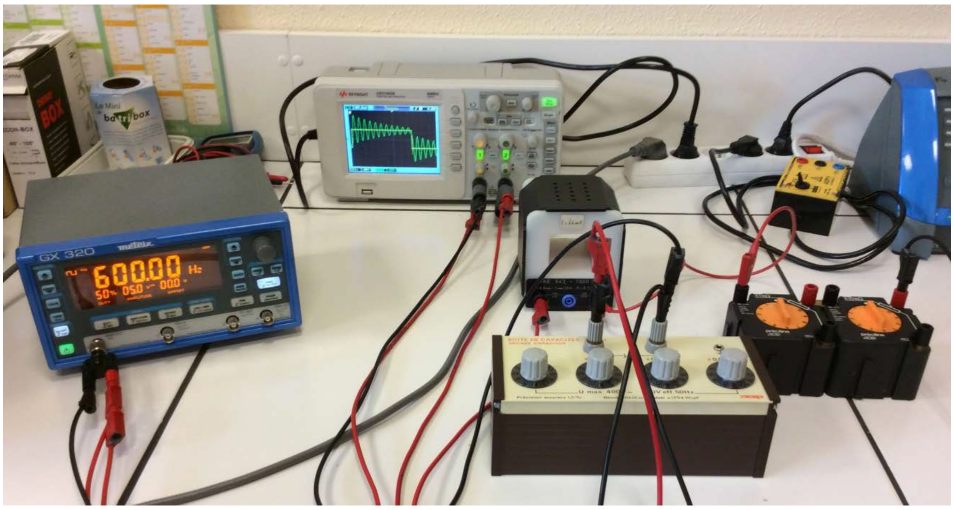
Réponse à un échelon de tension d'un circuit d'ordre 2 : RLC Série

On étudie le circuit linéaire RLC série soumis à un échelon de tension, c'est à dire au régime transitoire de ce circuit entre deux régimes continus qui donne naissance à des oscillations électriques.

Le circuit RLC étant du deuxième ordre, ce sera aussi le cas de son équation différentielle. Elle fera alors apparaître la notion de régimes : selon l'amortissement du circuit par effet Joule, le régime transitoire est différent.

1. Le montage





R : Boîtes AOIP (x 1 kΩ - x 10 kΩ), L : bobine 1000 spires (L= 44 mH, r= 9 Ω),
C : Boîte à décades de capacités

2. Equation différentielle

Le circuit RLC est soumis à une tension e(t). On s'intéresse à la tension aux bornes du condensateur et à l'intensité qui parcourt le circuit. La bobine est considérée idéale (r=0).

On applique la loi des mailles :

$$E = R\,i + L\frac{di}{dt} + u_C$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt} \text{ soit :}$$

$$\boxed{LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E}$$

On obtient bien une équation différentielle du second ordre.

3. Étude du régime libre

Nous allons nous intéresser au comportement du circuit lorsque le condensateur a été préalablement chargé sous la tension E du générateur, et lorsqu'il se décharge dans la bobine et la résistance.

L'équation différentielle correspondant à ce régime libre (appelé aussi régime propre) est la suivante :

$$\boxed{LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = 0}$$

On cherche donc une solution de cette équation qui est une équation homogène. Cette solution est du type $\mathbf{u=Ae^{rt}}$ avec A une constante.

Si on injecte cette solution dans l'équation différentielle et que l'on élimine la solution u=0 qui n'a pas de sens physique, on obtient :

$$LCr^2u + RCru + u = 0 \Longleftrightarrow r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0$$

Cette dernière équation est appelée polynôme caractéristique de l'équation différentielle.

Trouver les solutions de ce polynôme permet de trouver les solutions de l'équation différentielle.

Pour faciliter la résolution, nous allons utiliser des variables dites "réduites" :

- **Pulsation propre**

Celle-ci correspond à la pulsation des oscillations en l'absence de "frottements" (amortissement par effet Joule ici) :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$\begin{cases} \omega_0 \text{ : pulsation propre exprimée en } rad.\,s^{-1} \text{ ou } s^{-1} \\ L \text{ : inductance de la bobine exprimée en Henry (H)} \\ C \text{ : capacité du condensateur exprimée en Farad (F)} \end{cases}$$

- **Facteur d'amortissement**

Il est lié à la résistance globale du circuit. Plus ce facteur sera grand, plus l'amortissement sera élevé :

$$\boxed{\lambda = \frac{R}{2L}}$$

$$\begin{cases} \lambda \text{ : facteur d'amortissement exprimé en } s^{-1} \\ L \text{ : inductance de la bobine exprimée en Henry (H)} \\ R \text{ : résistance totale du circuit exprimée en Ohm } (\Omega) \end{cases}$$

- **Coefficient d'amortissement**

Il peut être intéressant de travailler avec une grandeur sans dimension. On définit alors le coefficient d'amortissement par :

$$\boxed{\alpha = \frac{\lambda}{\omega_0}}$$

Ce coefficient peut être exprimée en fonction des valeurs des composants du circuit :

$$\alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

- **Facteur de qualité**

Pour caractériser un circuit, on utilise souvent une autre grandeur appelée facteur de qualité. Elle est reliée à toutes les grandeurs ci-dessus :

$$\boxed{Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}}$$

En utilisant ces variables réduites, on peut donc écrire le polynôme caractéristique de la manière suivante :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{ou} \quad r^2 + 2\alpha\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

- Les différents régimes

Le polynôme caractéristique acceptant plusieurs solutions selon la valeur de son discriminant, il en est de même pour l'équation différentielle.

Vu la forme du polynôme, nous allons utiliser le discriminant réduit.

Ici, le discriminant réduit a pour expression :

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 \quad \text{ou} \quad \Delta' = \omega_0^2(\alpha^2 - 1)$$

Selon son signe on distingue trois régimes :

. **Régime apériodique : Δ'>0**

$$\text{Si } \Delta' > 0 \text{ alors } \lambda > \omega_0, \alpha > 1 \Longleftrightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \Longleftrightarrow \boxed{Q < \frac{1}{2}}$$

Racines du polynôme

Le polynôme admet deux racines négatives, on a :

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\alpha\omega_0 + \omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1}$$
$$r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\alpha\omega_0 - \omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1}$$

Solution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle s'écrit donc :

$$u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

On peut utiliser les conditions initiales pour expliciter les constantes A1 et A2.

C'est parce que le circuit est du deuxième ordre qu'existent ces deux constantes et qu'il faut deux conditions initiales pour les déterminer.

La continuité de la tension aux bornes du condensateur implique que u(t=0) = E.

La continuité de l'intensité dans la bobine implique que i(t=0) = 0.

On obtient alors deux équations à deux inconnues qui nous permettent de déterminer A1 et A2 **:**

$$u(t=0) = A_1 + A_2 = E$$

$$i(t=0) = r_1 A_1 + r_2 A_2 = 0 \iff A_2 = -\frac{r_1 A_1}{r_2}$$

On remplace cette expression de A_2 dans :

$$\begin{aligned} A_1 - \frac{r_1 A_1}{r_2} &= E \\ \iff A_1 \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) &= E \\ \iff \boxed{A_1 = \frac{r_2 E}{r_2 - r_1}} \end{aligned}$$

On remplace cette expression de A1 dans l'expression de A2 :

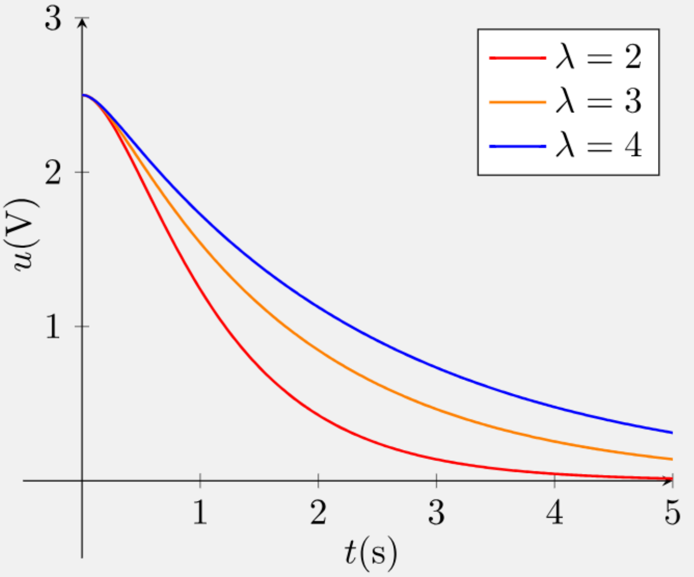
$$\boxed{A_2 = \frac{-r_1 E}{r_2 - r_1}}$$

<u>Expression et allure de la tension aux bornes du condensateur</u> :

$$\boxed{u(t) = \frac{r_2 E}{r_2 - r_1} e^{r_1 t} - \frac{r_1 E}{r_2 - r_1} e^{r_2 t}}$$

Lorsque **α>1 ⟺ Q<1/2**, il n'y a pas d'oscillations électrique car l'amortissement est trop fort.

On remarque qu'à t=0, la pente de u(t) est nulle : en effet, **i(t=0) = Cdu/dt = 0**.

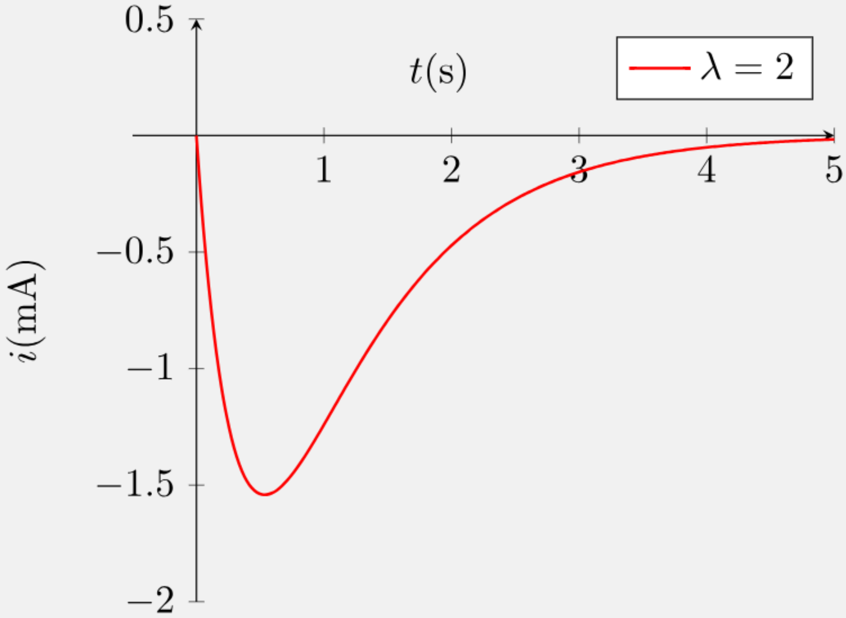


Tension aux bornes du condensateur lors d'un régime apériodique

<u>Expression et allure de l'intensité dans le circuit</u> :

Grâce à la relation $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, on trouve l'expression de l'intensité :

$$\boxed{i(t) = \frac{r_2 r_1 EC}{r_2 - r_1}(e^{r_1 t} - e^{r_2 t})}$$



Intensité du courant lors d'un régime apériodique

. **Régime critique : Δ'=0**

$$\text{Si } \Delta' = 0 \text{ alors } \lambda = \omega_0\,,\, \alpha = 1 \iff R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_C \iff \boxed{Q = \frac{1}{2}}$$

Le polynôme admet une racine double négative, on a :

$$r_1 = -\lambda = -\omega_0$$

Alors la solution de l'équation différentielle a pour expression :

$$u(t) = (A_1 t + A_2)e^{-\lambda t}$$

On utilise les mêmes conditions que précédemment pour déterminer les constantes :

$$u(t=0) = E \iff \boxed{A_2 = E}$$

On exprime i(t) :

$$i(t) = -\lambda C(A_1 t + A_2)e^{-\lambda t} + A_1 C e^{-\lambda t} = C e^{-\lambda t}\left(A_1 - \lambda(A_1 t + A_2)\right)$$

Et on écrit la condition de continuité :

$$i(t=0) = A_1 - \lambda A_2 = 0$$
$$\boxed{A_1 = \lambda A_2 = \lambda E}$$

La solution s'écrit donc :

$$\boxed{u(t) = E(\lambda t + 1)e^{-\lambda t}}$$

Le régime critique étant le premier régime apériodique, l'allure de la courbe est identique à celle du régime apériodique, le "retour à l'équilibre" se fait plus rapidement.

En utilisant la relation **i(t)=Cdu/dt**, on trouve :

$$\boxed{i(t) = -EC\lambda^2 t e^{-\lambda t}}$$

De la même manière que précédemment, on retrouve l'allure de l'intensité du courant du régime apériodique.

. **Régime pseudo-périodique : Δ'<0**

$$\text{Si } \Delta' < 0 \text{ alors } \lambda < \omega_0 \,,\, \alpha < 1 \iff R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \iff \boxed{Q > \frac{1}{2}}$$

Le polynôme admet deux racines complexes conjuguées. Si on pose $\omega^2=-\Delta'$, on a :

$$r_1 = -\lambda + j\omega \qquad\qquad r_2 = -\lambda - j\omega$$

La solution de l'équation différentielle est la combinaison linéaire de deux solutions complexes :

$$u_1(t) = e^{r_1 t} = e^{(-\lambda+j\omega)t} \text{ et } u_2 = e^{r_2 t} = e^{(-\lambda-j\omega)t} \text{ donnent } u(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

avec C1 et C2 des constantes complexes.

On peut montrer qu'à partir de ces deux solutions complexes, on peut construire deux solutions réelles tout aussi solutions de la même équation différentielle.

Ces deux solutions réelles sont :

$$u_3 = \frac{u_1 + u_2}{2} \qquad\qquad u_4 = \frac{u_1 - u_2}{2j}$$

Donc :

$$u_3 = \frac{e^{-\lambda t}(\cos\omega t + j\sin\omega t) + e^{-\lambda t}(\cos\omega t - j\sin\omega t)}{2} = e^{-\lambda t}\cos(\omega t)$$

$$u_4 = \frac{e^{-\lambda t}(\cos\omega t + j\sin\omega t) - e^{-\lambda t}(\cos\omega t - j\sin\omega t)}{2j} = e^{-\lambda t}\sin(\omega t)$$

La solution réelle de l'équation différentielle est alors une combinaison linéaire de u_3 et u_4 :

$$u(t) = (A_1\cos(\omega t) + A_2\sin(\omega t))e^{-\lambda t}$$

avec A1 et A2 des constantes réelles.

Détermination des constantes A_1 et A_2

Première condition :

$$u(t=0) = E \Longleftrightarrow \boxed{A_1 = E}$$

On exprime i(t) :

$$\begin{aligned} i(t) &= C\left(\left(-A_1\omega\sin(\omega t) + A_2\omega\cos(\omega t)\right)e^{-\lambda t} - \lambda\left(A_1\cos(\omega t) + A_2\sin(\omega t)\right)e^{-\lambda t}\right) \\ &= Ce^{-\lambda t}\left(-A_1\omega\sin(\omega t) + A_2\omega\cos(\omega t) - A_1\lambda\cos(\omega t) - \lambda A_2\sin(\omega t)\right) \end{aligned}$$

Deuxième condition :

$$i(t=0) = A_2\omega - \lambda A_1 = 0 \Longleftrightarrow \boxed{A_2 = \frac{\lambda}{\omega}E}$$

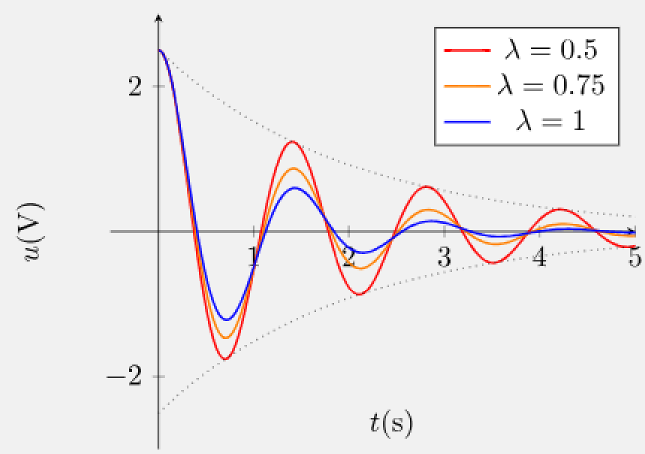
<u>Expression et allure de la tension aux bornes du condensateur</u> :

La solution s'écrit donc :

$$\boxed{u(t) = E(\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega t))e^{-\lambda t}}$$

Cette solution se découpe en deux parties :

- Une partie oscillante à la pulsation ω ;
- Une amplitude décroissance de manière exponentielle.



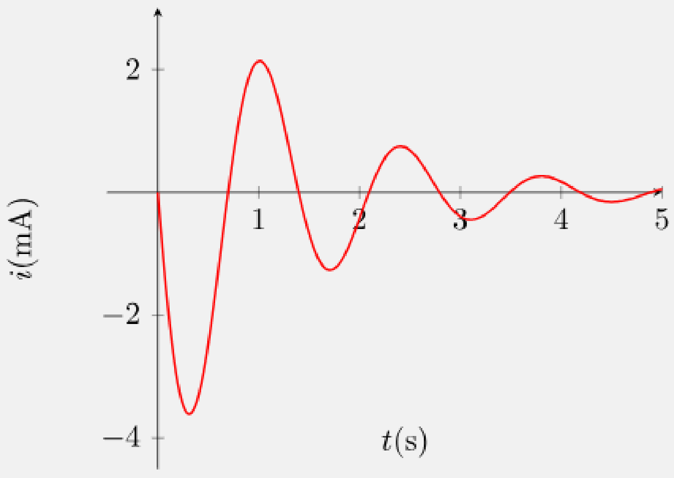
Allure de la tension aux bornes du condensateur lors d'un régime pseudo-périodique

<u>Expression et allure de l'intensité dans le circuit</u> :

On a :

$$i(t) = ECe^{-\lambda t}\left(-\omega\sin(\omega t) + \lambda\cos(\omega t) - \lambda\cos(\omega t) - \frac{\lambda^2}{\omega}\sin(\omega t)\right)$$

$$\boxed{i(t) = -CE(\frac{\omega^2+\lambda^2}{\omega})e^{-\lambda t}\sin(\omega t)}$$



Allure de l'intensité lors d'un régime pseudo-périodique

- Pseudo-période des oscillations

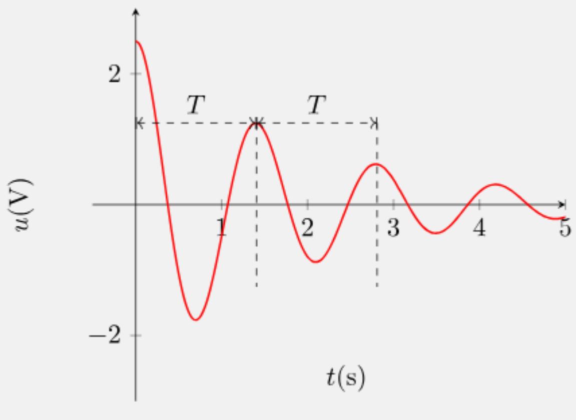
On observe donc des oscillations électriques à la pulsation ω, donc de pseudo-période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}}$$

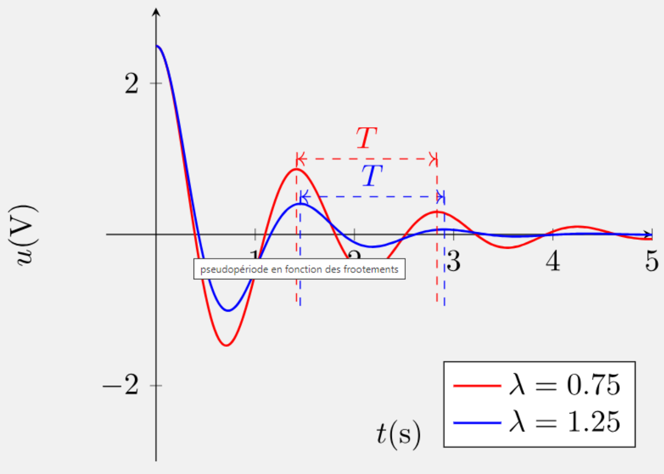
On parle de pseudo-période car l'amplitude décroît.

La pseudo-période est voisine mais plus grande que la période propre du circuit (celle qui correspond à un circuit non amorti (R=0)).

Plus l'amortissement est fort (α↗), plus la pseudo-période s'éloigne de la période propre.



Régime pseudo-périodique et pseudo-période



Plus les frottements sont importants , plus la pseudo-période est grande

4. <u>Aspect énergétique</u>

Dans le cas du régime libre, reprenons la loi des mailles :

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u = 0$$

Multiplions cette équation par $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$:

$$Ri^2 + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Cu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\iff \boxed{Ri^2 + \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right)}{\mathrm{d}t} = 0}$$

Dans cette expression, nous reconnaissons :

- Ri^2 : la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance ;
- $\dfrac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{\mathrm{d}t}$: la puissance reçue par la bobine. Elle peut être positive ou négative et correspond aux variations d'énergie magnétique dans la bobine ;
- $\dfrac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right)}{\mathrm{d}t}$: la puissance reçue par le condensateur. Elle peut être positive ou négative et correspond aux variations d'énergie électrique dans le condensateur.

Pour obtenir les variations énergétiques, on peut intégrer la relation entre $t = 0$ et $t \to \infty$. On obtient l'équation $E_J + \Delta E_C + \Delta E_L = 0$.
Cette relation indique que lorsque l'énergie emmagasinée dans le condensateur va varier, elle va se dissiper par effet Joule en partie, la partie restante étant accumulée par la bobine. Puis la bobine cédera son énergie au condensateur et au conducteur ohmique et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'énergie dans le circuit.

Résultats expérimentaux :

. C = 3 nF, R = 0 kΩ :

. C = 3 nF, R = 1 kΩ :

. C = 3 nF, R = 3 kΩ :

. C = 3 nF, R = 10 kΩ :