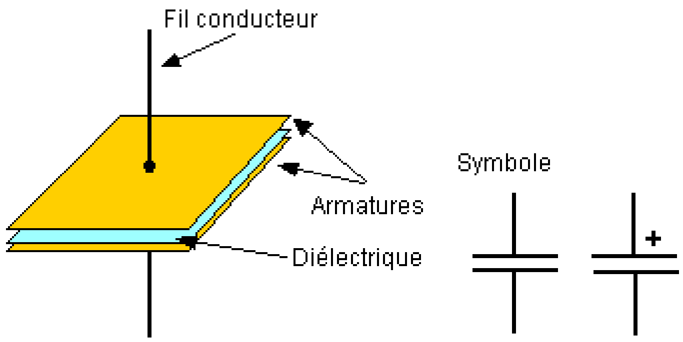
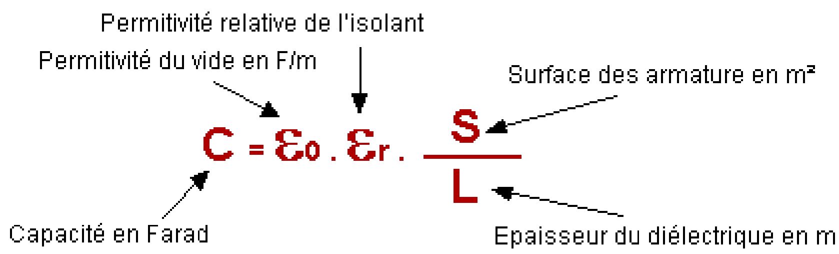
<u>Condensateurs et circuit RC</u>

Un condensateur est constitué de 2 armatures séparées par un isolant, le "diélectrique"

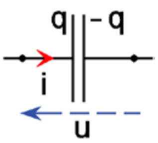


Par commodité, les films métalliques et l'isolant sont enroulés ou juxtaposés en plusieurs couches.
Les condensateurs avec un diélectrique chimique sont polarisés.

La caractéristique principale d'un condensateur est sa capacité exprimée en **farad.**



Les dimensions des plaques sont grandes devant l'épaisseur de l'isolant.
Le condensateur est un dipôle, on le symbolise par :



La charge q est, par convention la charge portée par la plaque par laquelle on entre dans le condensateur.

La charge qui apparaît sur l'une des plaques est l'opposée de celle qui apparaît sur l'autre plaque
En effet, la conservation de la charge électrique s'écrit : **q + q' = 0** d'où **q' = – q**.

L'intensité du courant est le débit de charges et est égale à la quantité de charges qui passent par unité de temps à travers une section de conducteur :

$$|I| = \left|\frac{Q}{\Delta t}\right|$$

On oriente le condensateur de A vers B (par exemple). Si des charges positives circulent de A vers B, alors l'intensité iAB > 0. Ces charges viennent s'accumuler sur la plaque A par laquelle on entre : qA augmente. Si qA augmente alors la variation de qA est > 0 :

$$\frac{\Delta q_A}{\Delta t} > 0$$

En passant à la limite Δt → δt → dt et en convention des récepteurs :

$$\boxed{i_{AB} = \frac{dq_A}{dt} \quad \text{où} \quad i = \frac{dq}{dt}}$$

La charge qui s'accumule sur les plaques d'un condensateur est proportionnelle à la tension qu'on applique à ses bornes.
On a :

$$|Q| = C.|U|$$

Algébriquement, en convention des récepteurs :
$Q = C.U$
Si Q est exprimé en coulomb (C) et U en volt (V) alors :
L'unité légale fondamentale de mesure de la capacité d'un condensateur est le farad (F).
Le farad étant une grande unité, on utilise souvent des sous-multiples :
1 nF = 10^{-9} F, 1 pF = 10^{-12} F

On oriente géométriquement le condensateur de la borne A vers la borne B.
Soit i_{AB} l'intensité algébrique du courant allant de A vers B et q_A la charge qui apparaît sur la plaque par laquelle on entre dans le condensateur.
Nous admettrons que la relation algébrique Q = C.U est vraie à chaque instant.
On a physiquement donc : $q_A = - q_B = C.(V_A - V_B)$
En tenant compte de la relation entre i_{AB} et q_A, on a :

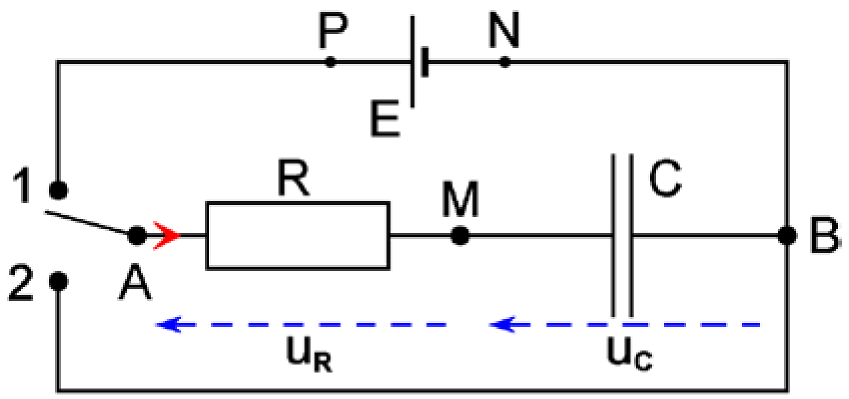
$$i_{AB} = \frac{dq_A}{dt} = C.\frac{d(V_A - V_B)}{dt} = C.\frac{du_{AB}}{dt}$$

On retiendra les relations algébriques dans la convention des récepteurs :

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{C}.q(t) \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C.\frac{du(t)}{dt}}$$

Réponse d'un dipôle RC à un "échelon de tension"

Un dipôle RC est l'association en série d'un conducteur ohmique (conducteur ohmique) de résistance R et d'un condensateur de capacité C.
Un échelon de tension est un signal électrique de forme : u(t) = 0 si t < 0 et u(t) = E si t > 0.
On considère un circuit formé de deux mailles, dont l'une comporte un générateur de tension continue UPN = E et l'autre un conducteur parfait.



1. Charge du condensateur

Le condensateur étant déchargé, on bascule l'interrupteur en position 1 (générateur).

A chaque instant t > 0, on a : **VA – VB = uR(t) + uC(t) = R.i(t) + uC(t) = E**

On a $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ et $q(t) = C.u_C(t)$ donc $i(t) = C.\frac{du_C(t)}{dt}$ soit $R.C.\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E$

D'où l'équation : $\boxed{\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{R.C}.u_C(t) = \frac{E}{R.C}}$

On dit que $u_C(t)$ satisfait à une équation différentielle <u>non homogène</u> du premier ordre.

Avec $q(t) = C.u_C(t)$, on a $$\boxed{\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{R.C}.q(t) = \frac{E}{R}}$$

A t = 0, le condensateur est déchargé et $q(0) = C.u_C(0) = 0$, on en déduit : $\left.\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0} = \frac{E}{R.C}$

On a donc un point de la courbe représentative de $u_C(t)$: (0 ; 0) ainsi que la valeur de la pente de la tangente à cette courbe à l'origine des dates.

Au bout d'un temps assez long ($t = \infty$) on peut considérer que le condensateur est chargé et qu'il ne passe plus de charge dans le circuit : $\left.\frac{dq}{dt}\right)_{t=\infty} = C.\left.\frac{du_C}{dt}\right)_{t=\infty} = 0$ donc $\left.\frac{du_C}{dt}\right)_{t=\infty} = 0$

De l'équation différentielle, on tire : $u_C(\infty) = E$ tension aux bornes du générateur.

La courbe représentative de $u_C(t)$ tend vers la valeur E qui représente une asymptote avec une pente nulle. La courbe tend exponentiellement vers cette valeur.

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$u_C(t) = A.e^{-m.t} + B$ où $m > 0$, m et B constantes d'intégration, A constante non définie.

Introduisons cette expression dans l'équation : $\frac{d(A.e^{-m.t}+B)}{dt} + \frac{1}{R.C}.(A.e^{-m.t} + B) = \frac{E}{R.C}$

D'où : $$-m.A.e^{-m.t} + \frac{A}{R.C}.e^{-m.t} + \frac{B}{R.C} = \frac{E}{R.C}$$

Cette équation doit être vérifiée à chaque instant, on en déduit : B = E

D'où : $$-m.A.e^{-m.t} + \frac{A}{R.C}.e^{-m.t} = 0 \quad \text{et} \quad m = \frac{1}{R.C}$$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit : $u_C(t) = A.e^{-\frac{t}{R.C}} + E$

A est une constante qui dépend des <u>conditions initiales</u>.

Ici, à t = 0, le condensateur est déchargé, donc : $u_C(0) = 0 = A.e^{-0} + E$ d'où $A = -E$

Compte tenu des conditions initiales imposées par l'expérience, la solution est :

$$\boxed{u_C(t) = E.(1 - e^{-\frac{t}{R.C}})}$$

En appliquant les relations : $q(t) = C.u_C(t)$ et $i(t) = C.\frac{du_C(t)}{dt}$

On a : $$\boxed{q(t) = C.E.(1 - e^{-\frac{t}{R.C}}) \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{R.C}}}$$

Au bout d'un temps long : $q(\infty) = C.E = Q_0$ le condensateur est chargé

Et : $i(\infty) = 0$ il n'y a plus de courant

2. Décharge du condensateur dans une résistance

Le condensateur étant chargé (**$q(0) = Q_0$**), on bascule K en 2.

A chaque instant t > 0, on a : $V_A - V_B = u_R(t) + u_C(t) = R.i(t) + u_C(t) = 0$

On a $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ et $q(t) = C.u_C(t)$ donc $i(t) = C.\frac{du_C(t)}{dt}$ soit $R.C.\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$

D'où l'équation : $$\boxed{\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{R.C}.u_C(t) = 0}$$

On dit que $u_C(t)$ satisfait à une équation différentielle homogène du premier ordre.

Avec $q(t) = C.u_C(t)$, on a $$\boxed{\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{R.C}.q(t) = 0}$$

A t = 0, le condensateur est chargé $q(0) = C.u_C(0) = C.E$, on en déduit : $\left.\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{E}{R.C}$

On a donc un point de la courbe représentative de $u_C(t)$: (0 ; E) ainsi que la valeur de la pente de la tangente à cette courbe à l'origine des dates.

Au bout d'un temps assez long ($t = \infty$) on peut considérer que le condensateur est déchargé et qu'il ne passe plus de charge dans le circuit : $\left.\frac{dq}{dt}\right)_{t=\infty} = C.\left.\frac{du_C}{dt}\right)_{t=\infty} = 0$ donc $\left.\frac{du_C}{dt}\right)_{t=\infty} = 0$ et $u_C(\infty) = 0$.

La courbe représentative de $u_C(t)$ tend vers 0 qui représente une asymptote avec une pente nulle. La courbe tend exponentiellement vers 0.

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$u_C(t) = A.e^{-m.t} + B$ où $m > 0$, m et B constantes d'intégration, A constante non définie.

Introduisons cette expression dans l'équation : $\frac{d(A.e^{-m.t}+B)}{dt} + \frac{1}{R.C}.(A.e^{-m.t} + B) = 0$

D'où : $$-m.A.e^{-m.t} + \frac{A}{R.C}.e^{-m.t} + \frac{B}{R.C} = 0$$

Cette équation doit être vérifiée à chaque instant, on en déduit : B = 0

D'où : $$-m.A.e^{-m.t} + \frac{A}{R.C}.e^{-m.t} = 0 \text{ et } m = \frac{1}{R.C}$$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit : $u_C(t) = A.e^{-\frac{t}{R.C}}$

Là encore A est une constante qui dépend des conditions initiales.

Ici, à t = 0, le condensateur est chargé, donc : $u_C(0) = E = A.e^{-0}$ d'où $A = E$

Compte tenu des conditions initiales imposées par l'expérience, la solution est :

$$\boxed{u_C(t) = E.e^{-\frac{t}{R.C}}}$$

En appliquant les relations : $q(t) = C.u_C(t)$ et $i(t) = C.\frac{du_C(t)}{dt}$

On a : $\boxed{q(t) = C.E.\,e^{-\frac{t}{R.C}} \quad \text{et} \quad i(t) = -\frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{R.C}}}$

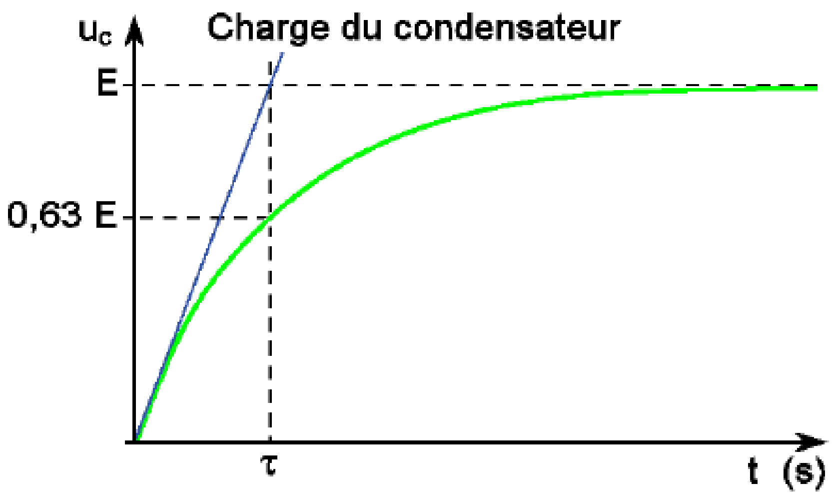
Au bout d'un temps long : $q(\infty) = 0$ le condensateur est déchargé
Et : $i(\infty) = 0$ il n'y a plus de courant

3. Constante de temps du dipôle RC

Le produit : $\tau = R.C$ est homogène à un temps, appelé constante de temps du dipôle RC.

. Lors de la charge :

$$u_C(t) = E.(1 - e^{-\frac{t}{R.C}})$$



La tangente à la courbe à l'origine coupe l'asymptote y = E au point d'abscisse t = τ.
En effet, la tangente à la courbe représentative de $u_C(t)$, à l'origine des dates, a pour équation :

$$y = \left.\frac{d[u_C(t)]}{dt}\right)_{t=0} .t = -E.(-\frac{1}{R.C}).t = \frac{E}{R.C}.t$$

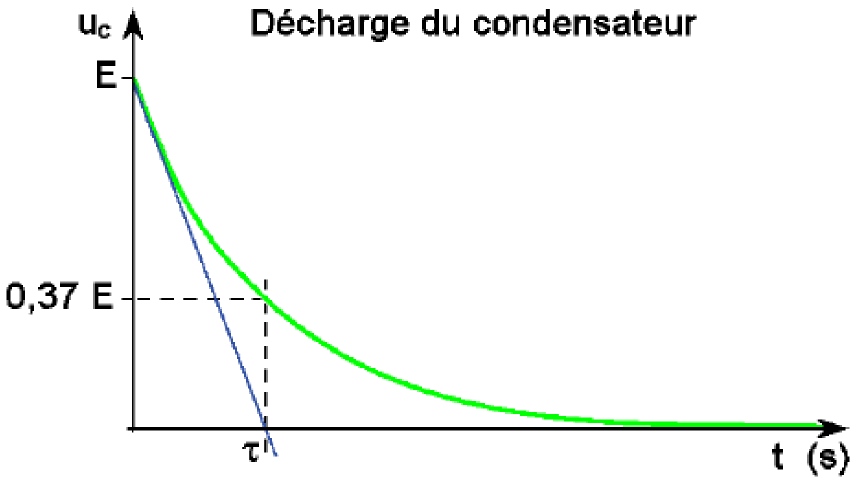
Elle coupe l'asymptote y = E en un point d'abscisse t : E/(R.C).t = E soit t = R.C = τ
Et :

$$u_C(\tau) = E.(1 - e^{-1}) \approx 0{,}63.E.$$

Par lecture graphique de l'abscisse du point de la courbe dont l'ordonnée est égale à 0,63.E, on obtient la valeur de τ.

. Lors de la décharge :

$$u_C(t) = E.e^{-\frac{t}{R.C}}$$



On détermine :

$$u_C(\tau) = E.e^{-1} \approx 0,37.E$$

Par lecture graphique de l'abscisse du point de la courbe dont l'ordonnée est égale à 0,37.E, on obtient la valeur de τ.

Pendant une durée Δt de quelques τ (de l'ordre $5.\tau$) le condensateur se charge ou se décharge : c'est le régime transitoire du phénomène.
Au bout de quelques τ (de l'ordre $5.\tau$), le condensateur est chargé ou déchargé et l'intensité du courant est nulle : c'est le régime permanent du phénomène.

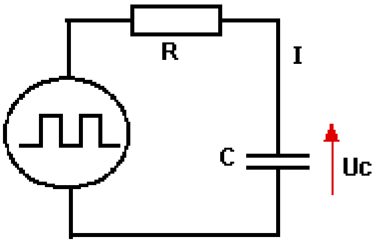
Energie emmagasinée par le condensateur :

$$W_C(t) = \frac{1}{2}.\frac{[q(t)]^2}{C} = \frac{1}{2}.C.[u(t)]^2$$

W_C en J, q en C, u en V et C en F.

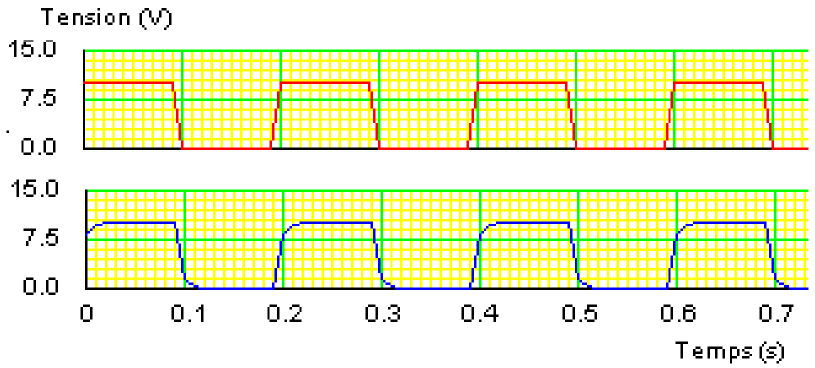
Comportement des circuits RC

Le circuit RC est alimenté par un générateur de tension rectangulaire entre 0 Volt et Vcc



La fréquence du générateur est variable. Nous observons la forme de la tension Uc en fonction de cette fréquence.

Si la fréquence d'entrée est faible, le condensateur a largement le temps de se charger et de se décharger. Le signal en sortie est presque identique à celui d'entrée. Le montage laisse donc passer les fréquences basses.
C'est un filtre passe-bas.



Si la fréquence d'entrée est élevée, le condensateur n'a
pas le temps de se charger et de se décharger. La tension en sortie est constante et égale à la valeur moyenne.
C'est un intégrateur.