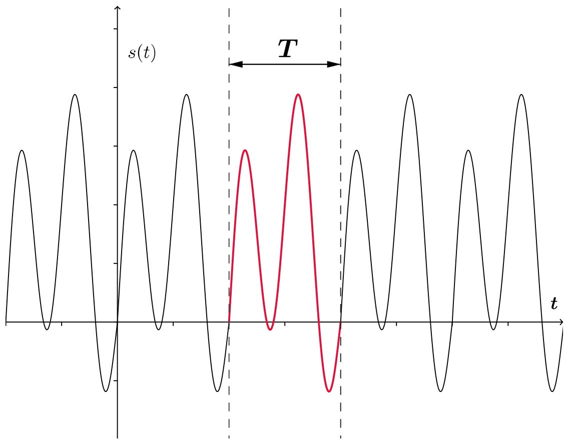
CARACTÉRISTIQUES D'UN SIGNAL

I. Signal périodique

1. Période, fréquence

La période T d'un signal est la plus petite durée au bout de laquelle le signal se reproduit identique à lui-même.

$$s(t+T) = s(t)$$



La fréquence correspond au nombre de périodes par unité de temps :

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

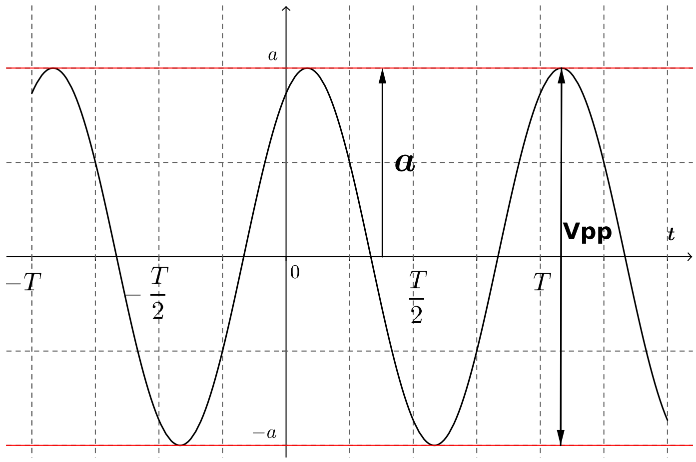
L'unité SI de f est le hertz : 1 Hz=1 s^{-1}.

2. Signal sinusoïdal

On considère un signal de la forme :

$$s(t) = a\,\cos(\omega\,t + \varphi)$$

a	amplitude du signal (a est de même dimension que s)
$\omega\,t+\varphi$	phase du signal
φ	phase à $t=0$ $\quad \varphi \in [-\pi, \pi]$
ω	pulsation du signal
T	période du signal $T = \frac{2\pi}{\omega}$
f	fréquence du signal $f = \frac{1}{T}$ (s^{-1}=Hz)



Remarque :
En TP, on utilise des GBF pour produire une tension sinusoïdale. Il faudra bien distinguer l'amplitude et l'amplitude crête à crête (ou peak to peak) qu'affichent généralement les GBF et qui représente l'écart entre la valeur maximale et la valeur minimale d'un signal.
Pour un signal sinusoïdal, la valeur peak to peak vaut le double de l'amplitude $V_{PP} = 2a$.

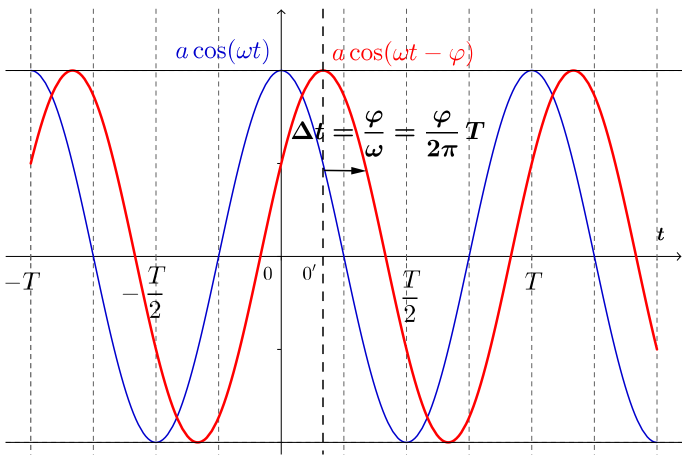
Soient :

$$\begin{aligned} s_1(t) &= a\cos\omega\, t \\ s_2(t) &= a\cos(\omega\, t - \varphi) \qquad \text{avec } \varphi \in [0, \pi] \\ s_3(t) &= a\cos(\omega\, t + \psi) \qquad \text{avec } \psi \in [0, \pi] \end{aligned}$$

On dit que s_2 est en retard de phase de φ par rapport à s_1 et s_3 est en avance de phase de par rapport à s_1.

Retard de phase

$s_2(t) = a\ \cos(\omega\, t - \varphi) = a\ \cos\ \omega(t - \frac{\varphi}{\omega}) = a\ \cos(\omega\, t')$ avec $t' = t - \frac{\varphi}{\omega}$. La courbe est inchangée dans un repère d'origine O' avec $t' = 0$ pour $t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi}{2\,\pi}T$.
La courbe $a\cos(\omega\, t - \varphi)$ se déduit de la courbe $a\cos(\omega\, t)$ par un décalage temporel $\Delta t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi}{2\,\pi}T$:

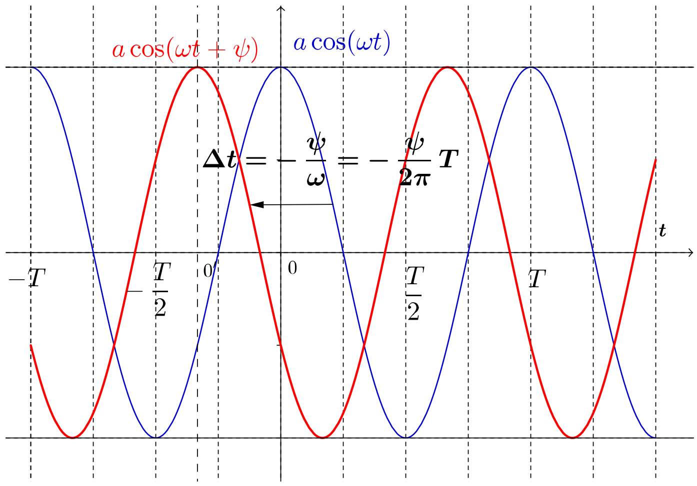


Si $\varphi \in [0, \pi]$ alors la **courbe $s_2(t)$ est décalée vers la droite** d'une durée comprise entre 0 et $\frac{T}{2}$.

Avance de phase

$s_3(t) = a\,\cos(\omega\,t+\psi) = a\,\cos\,\omega(t+\frac{\psi}{\omega}) = a\,\cos(\omega\,t')$ avec $t' = t+\frac{\psi}{\omega}$. La courbe est inchangée dans un repère d'origine O' avec $t'=0$ pour $t=-\frac{\psi}{\omega}=-\frac{\psi}{2\,\pi}T$.

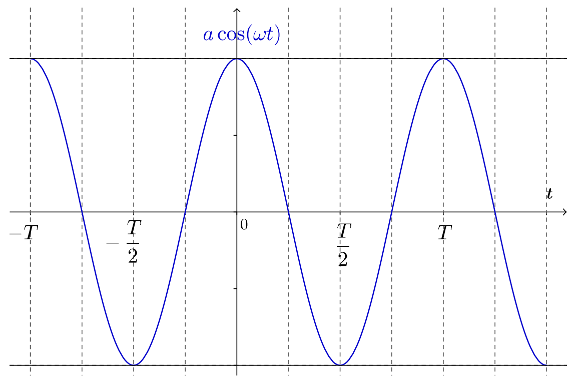
La courbe $a\cos(\omega\,t+\psi)$ se déduit de la courbe $a\cos(\omega\,t)$ par un décalage temporel $\Delta t = -\frac{\psi}{\omega} = -\frac{\psi}{2\,\pi}T$:



Si $\psi \in [0,\pi]$ alors la **courbe $s_3(t)$ est décalée vers la gauche** d'une durée comprise entre 0 et $\frac{T}{2}$.

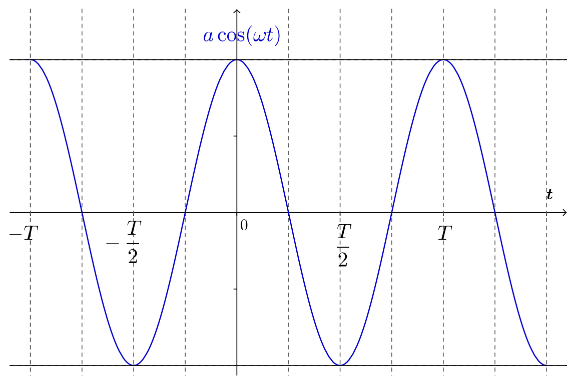
Lorsque le déphasage vaut $\pi/2$, on parle de quadrature de phase avance (pour $a\cos(\omega\,t+\frac{\pi}{2})$) ou retard (pour $a\cos(\omega\,t-\frac{\pi}{2})$). Représenter sur le diagramme ci-dessous, un signal en quatradure de phase retard :

$a\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})$



Représenter de même sur le diagramme ci-dessous le signal $a\cos(\omega\,t\pm\pi)$:

$a\cos(\omega t\pm\pi)$



Lorsque le déphasage vaut $\pm\pi$, on dit que les signaux sont en opposition de phase.

φ	$\Delta t = \frac{\varphi}{2\pi} T$
2π	T
$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4}$	$\Delta t = \frac{T}{4}$
$\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}$	$\Delta t = \frac{T}{6}$
$\pi = \frac{2\pi}{2}$	$\Delta t = \frac{T}{2}$

II. Valeur moyenne d'un signal périodique

1. Définition

Soit $s(t)$ un signal périodique de période T. On note $< s(t) >$ sa valeur moyenne. Par définition

$$\boxed{< s(t) >= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \mathrm{d}t \quad \forall t_0}$$

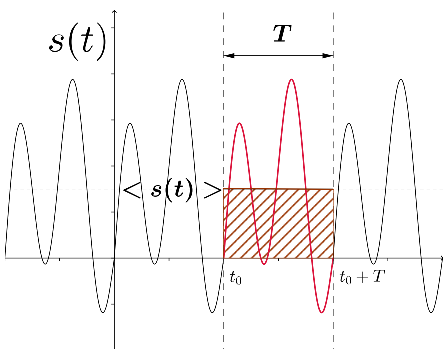
l'intégration se fait sur un intervalle de temps égal à la période T, l'origine t_0 pouvant être choisie arbitrairement.

En général, on choisit la valeur de t_0 qui permet les calculs les plus simples.
– exemple 1 : $t_0 = 0$, on intègre alors de 0 à T.
– exemple 2 : $t_0 = -\frac{T}{2}$ on intègre alors de $-\frac{T}{2}$ à $\frac{T}{2}$, ce qui peut être utile quand la fonction $s(t)$ est paire.

2. Interprétation graphique

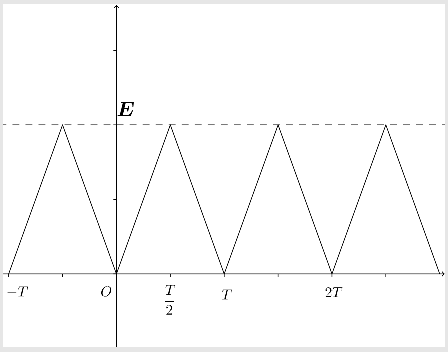
$$< s(t) > T = \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \mathrm{d}t$$

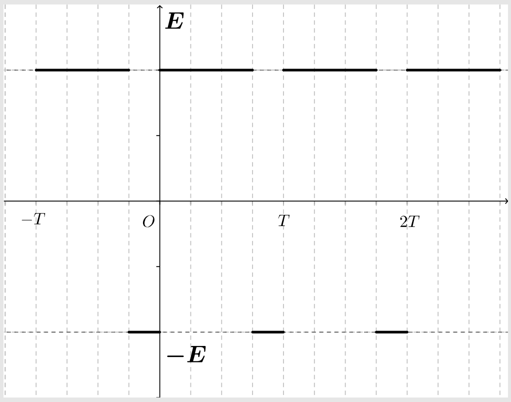
$\int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \mathrm{d}t$ représente l'aire sous la courbe sur une période.
$< s(t) > T$ est l'aire du rectangle de côtés $< s(t) >$ et T.
La valeur moyenne $< s(t) >$ est celle qui permet d'égaler les deux aires.



Retenir : $\boxed{< s(t) >= \frac{1}{T} \times \text{ aire sous la courbe sur une période.}}$

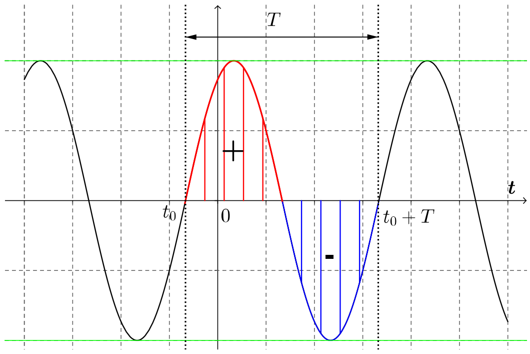
Applications :
Déterminer la valeur moyenne des signaux suivants :





3. Cas particulier du signal sinusoïdal

Sur une période, l'aire sous la courbe est nulle (l'aire positive compensant exactement l'aire négative).



Retenir :
$$\boxed{\begin{array}{l} < \cos(\omega t + \varphi) >= 0 \\ < \sin(\omega t + \varphi) >= 0 \end{array}}$$

la valeur moyenne d'un sinus (ou d'un cosinus) est nulle.

III. Valeur efficace d'un signal

1. Définition

Les signaux sinusoïdaux ont une valeur moyenne nulle. Cependant ils peuvent transmettre de l'énergie.
En effet, l'énergie associée à un signal est en général proportionnelle au carré $s^2(t)$ de celui-ci (par exemple, pour un signal sonore, l'énergie est proportionnelle au carré de la surpression).
On a donc intérêt à définir la moyenne quadratique du signal, $i.e$ la valeur moyenne de $s^2(t)$.
Si $s(t)$ est périodique de période T alors $s^2(t)$ l'est aussi. La valeur quadratique moyenne du signal vaudra donc, d'après la définition précédente de la valeur moyenne :

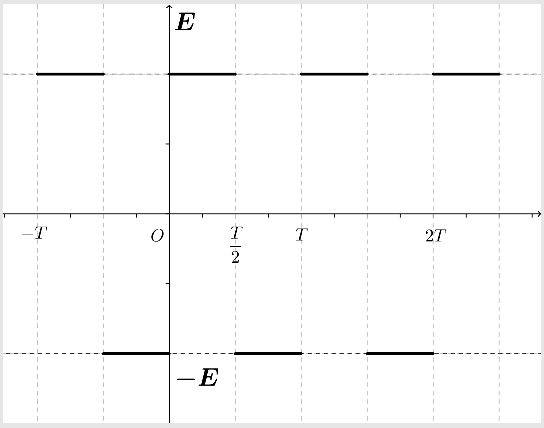
$$< s^2(t) >= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\mathrm{d}t \quad \forall t_0$$

$< s^2(t) >$ a les mêmes dimensions que $s(t)^2$ ($< s^2(t) >$ sera en Pa^2 si $s(t)$ est une pression mesurée en pascal).
On souhaite que la valeur efficace du signal soit de même dimension que celui-ci. Il suffit alors de prendre la racine carrée de la valeur quadratique moyenne. On définit ainsi la valeur efficace s_{eff} sur signal par :

$$\boxed{s_{eff} = \sqrt{< s^2(t) >} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\mathrm{d}t} \quad \forall t_0}$$

Application :

Déterminer la valeur efficace du signal ci-contre



2. Cas particulier du signal sinusoïdal

a) Valeur moyenne d'un $\cos^2$ ou d'un $\sin^2$

$$\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2}$$

$$< \cos^2(\omega t + \varphi) >= \frac{1}{2} + \frac{< \cos(2\omega t + 2\varphi) >}{2}$$

or $< \cos(2\omega t + 2\varphi) >= 0$ car la valeur moyenne d'un cosinus est nulle. On en déduit

$$< \cos^2(\omega t + \varphi) >= \frac{1}{2}.$$

de même $\sin^2(\omega t + \varphi) = \dfrac{1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2}$ permet d'écrire $< \sin^2(\omega t + \varphi) >= \dfrac{1}{2}$

Retenir : $\boxed{\begin{array}{l} < \cos^2(\omega t + \varphi) >= \frac{1}{2} \\ < \sin^2(\omega t + \varphi) >= \frac{1}{2} \end{array}}$ La valeur moyenne d'un $\cos^2$ ou d'un $\sin^2$ est égale à $\frac{1}{2}$

b) Valeur efficace

$$s_{eff}^2 =< s^2(t) >= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a^2\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t = a^2 < \cos^2(\omega t+\varphi) >= \frac{a^2}{2}$$

$$\boxed{s_{eff} = \frac{a}{\sqrt{2}}}$$

La valeur efficace d'un signal sinusoïdal est égale à l'amplitude du signal divisée par $\sqrt{2}$.

3. Mesures

En TP on utilise des multimètres pour mesurer des tensions et des intensités électriques.
On verra qu'un multimètre en position $\sim$ (courant ou tension alternative) mesure la valeur efficace d'un signal sinusoïdal, et d'un signal périodique quelconque (pour cela le multimètre doit être T.R.M.S. "True Root Mean Square").
Si le multimètre est placé en position $=$ (courant ou tension continue) il renvoie la valeur moyenne du signal.

IV. Analyse spectrale d'un signal périodique

1. Analyse de Fourier

Le mathématicien Joseph Fourier (1768-1830) a établi le théorème suivant :

> Tout signal périodique de période T, de fréquence $f = 1/T$, de pulsation $\omega = 2\pi f$, peut s'exprimer sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de f appelée **série de Fourier** :
>
> $$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f t + \varphi_k)$$

Des formules mathématiques permettent de calculer les valeurs des A_k et des φ_k, connaissant l'expression de la fonction $s(t)$.

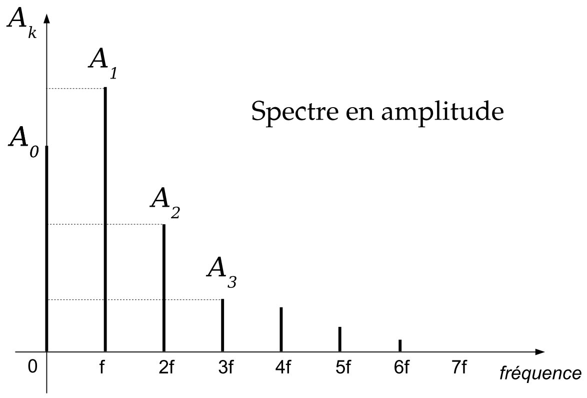
- A_0 correspond à la **valeur moyenne du signal**.
  En effet : $< s(t) >= A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k < \cos(2\pi k f t + \varphi_k) >= A_0$ *car la valeur moyenne d'un cosinus est nulle.*
- le terme $A_1 \cos(2\pi f t + \varphi_1)$ correspondant à $k = 1$ et donc de même fréquence que le signal, est appelé **fondamental**.
- le terme $A_k \cos(2\pi k f t + \varphi_k)$ de fréquence f_k multiple de la fréquence du fondamental ($f_k = kf$) est appelé **harmonique de rang** k.

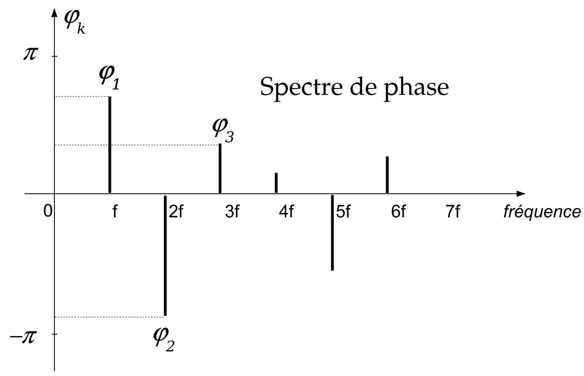
2. Spectre du signal

Réaliser l'analyse spectrale d'un signal consiste à déterminer les valeurs des A_k et des φ_k.

Le **spectre en amplitude** correspond à la représentation graphique des A_k en fonction des fréquences f_k.

Le **spectre de phase** correspond à la représentation graphique des phases initiales φ_k en fonction des fréquences f_k. Il dépend du choix d'origine des temps, et en général n'est pas réalisé.





3. Spectre en amplitude et valeur efficace

En général, l'énergie associée à un signal est liée à sa valeur efficace. Le théorème de Parseval établit la relation :

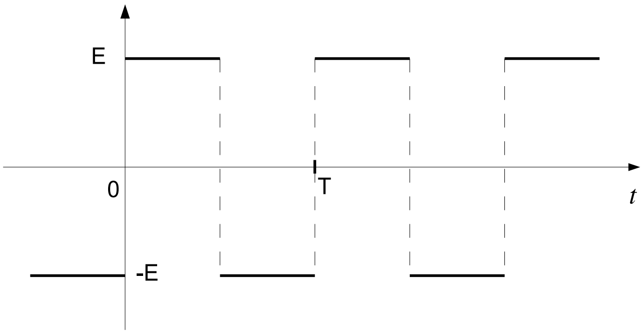
$$\boxed{s_{eff}^2 = < s^2 > = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} s^2(t)\,\mathrm{d}t = A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k^2}{2}}.$$

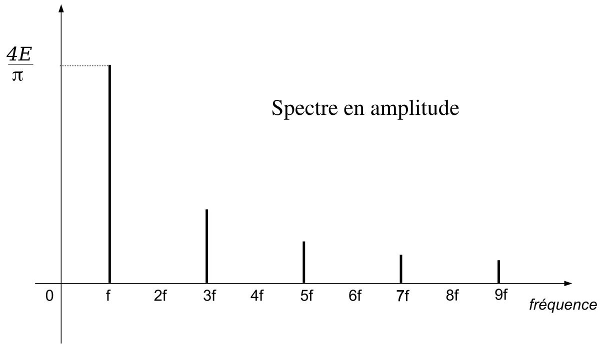
Le carré de la valeur efficace d'un signal est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de chacune de ses composantes spectrales.

4. Synthèse de Fourier

La donnée des A_k et φ_k permet de reconstituer le signal.

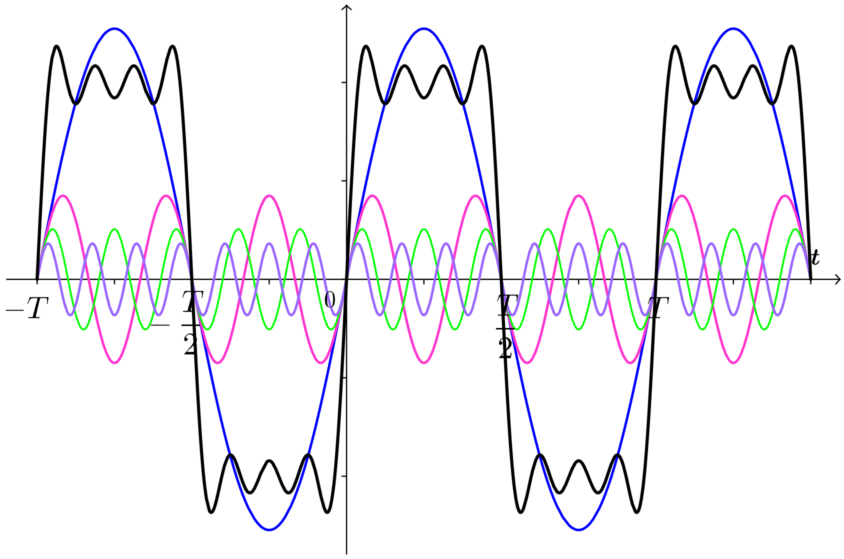
Exemple 1 : signal créneau



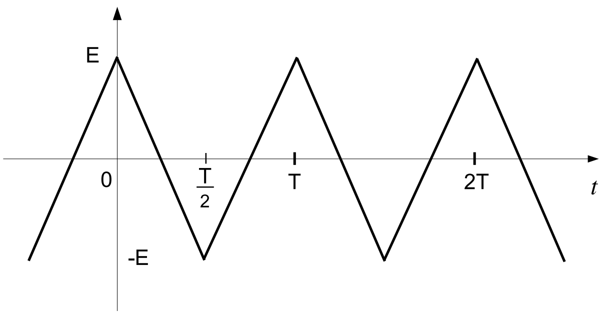


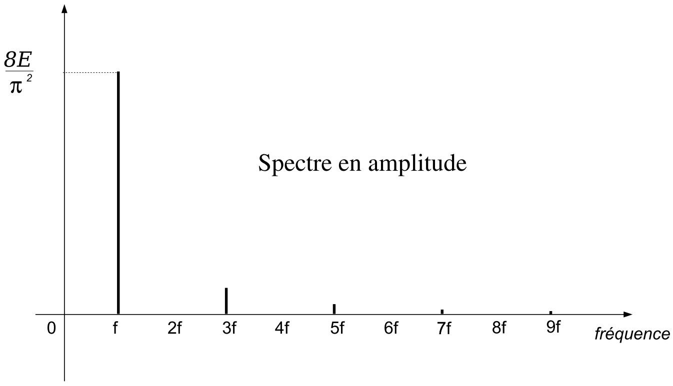
On peut montrer que $s(t) = \dfrac{4E}{\pi} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{\sin[2\pi(2p+1)ft]}{2p+1}$.

On a tracé ci-dessous les quatres premiers termes (le fondamental et les harmoniques de rang 3,5,7), ainsi que leur somme (en noir).



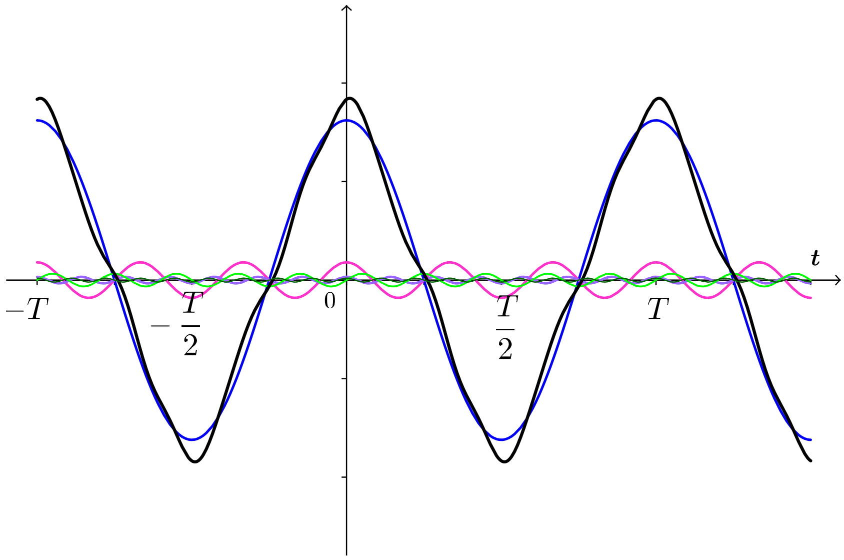
Exemple 2 : signal triangulaire





On peut montrer que $s(t) = \dfrac{8E}{\pi^2} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{\cos[2\pi(2p+1)ft]}{(2p+1)^2}$.

On a tracé ci-dessous les quatres premiers termes (le fondamental et les harmoniques de rang 3,5,7), ainsi que leur somme (en noir).



On constate que les amplitudes des harmoniques d'un créneau décroissent moins vite que celle d'un triangle. Il faudra utiliser plus de termes pour reconstituer le signal créneau que pour reconstituer le signal triangulaire.
De plus, les discontinuités du créneau ne peuvent être approchées infiniment près par sa série de Fourier : quel que soit le nombre de termes utilisés, il restera toujours des petits pics au niveau des discontinuités. On appelle cela le phéomène de Gibbs.